Note sur le choix des investissements en présence de rationnement du capital

Denis Babusiaux

Ecole nationale supérieure **du pétrole et des moteurs**

Note sur le choix des investissements en présence de rationnement du capital

Denis BABUSIAUX

Janvier 1990

économie et gestion

INSTITUT FRANÇAIS DU PÉTROLE

La collection "Cahiers du CEG" est un recueil des travaux réalisés au Centre d'Economie et Gestion de l'ENSPM, Institut Français du Pétrole. Elle a été mise en place pour permettre la diffusion de ces travaux, parfois sous une forme encore provisoire, afin de susciter des échanges de points de vue sur les sujets abordés.

Les opinions émises dans les textes publiés dans cette collection doivent être considérées comme propres à leurs auteurs et ne reflètent pas nécessairement le point de vue de l'IFP ou de l'ENSPM.

Pour toute information complémentaire, prière de contacter :
Saïd NACHET (*Responsable de la publication*) tél. (1) 47 52 64 08

"Cahiers du CEG" is a collection of researchs realized within the Center for Economics and Management of the ENSPM, Institut Français du Pétrole. The goal of such collection is to allow views exchange about the subjects treated of.

The opinions defended in the papers published are the author(s) sole responsability and don't necessarily reflect the views of the IFP or ENSPM.

For any additional information, please contact :
Saïd NACHET (*Editor*) tel. (1) 47 52 64 08

Centre Economie et Gestion

Note sur le choix des investissements en présence de rationnement du capital

Denis BABUSIAUX

Janvier 1990

Cahiers du CEG - n⁰ 4

ENSPM - Centre Economie et Gestion
228-232, avenue Napoléon Bonaparte, Boite postale 311, 92506 RUEIL MALMAISON CEDEX.
télécopieur : 33 (1) 47 52 70 66 - téléphone : 33 (1) 47 52 64 25.

RESUME

Cette note présente deux "théorèmes". On considère un problème de choix d'investissement en présence de rationnement de capital formulé à l'aide d'un modèle de programmation mathématique. Le premier résultat est relatif au cas où la fonction objectif à maximiser sous contraintes est une valeur actuelle à un taux d'actualisation initial donné. On démontre que la solution optimale et les taux d'actualisation endogènes sont indépendants, sous certaines hypothèses, du taux d'actualisation initial. En introduisant des hypothèses de financement, on montre ensuite l'équivalence entre le premier problème et celui de la maximisation de la valeur de l'entreprise à l'année horizon. Ces propriétés permettent de mieux apprécier la validité d'un critère de valeur actuelle, y compris lorsque l'on se limite à l'utilisation de méthodes simplifiées.

ABSTRACT

This note presents two theorems. An investment decision problem under capital rationing in formulated using a mathematical model. The first result relates to the case where in the objective function is to maximize present value computed at a given initial discount rate, subject to constraints. It is demonstrated that the optimal investment decision and the endogenous discount rates, under certain assumptions, are independent of the initial discount rate. When assumptions concerning financing are introduced, it is then shown that the initial constrained problem, and the problem of maximizing the value of the firm at a given horizon year, are equivalent. These properties make it possible to better appreciate the validity of a present-value criterion, including when the analysis is limited to the use of "simplified" methods.

INTRODUCTION

Nous considérons un problème de choix d'investissement en présence de rationnement de capital. La première section sera consacrée à un rappel rapide des deux méthodes simplifiées couramment utilisées, aussi bien dans les entreprises que par l'administration. Nous en donnerons une interprétation très simple, mais qui permet de mieux appréhender leurs domaines de validité. Nous généraliserons ensuite le problème de rationnement posé en considérant des contraintes de budget sur plusieurs périodes. Au cours de la deuxième section, nous étudierons un problème de rationnement formulé comme un problème de programmation mathématique dont la fonction objectif est une valeur actuelle. Les résultats présentés seront relatifs au cas où toutes les contraintes sauf la dernière sont saturées. Enfin, nous ferons intervenir en troisième section des hypothèses de financement et traiterons de l'équivalence entre un problème de maximisation de la valeur de l'entreprise à l'horizon et un problème de maximisation d'une valeur actuelle sous contraintes. Les propriétés présentées permettront de mieux apprécier la validité d'un critère de valeur actuelle.

I. LES METHODES SIMPLIFIEES

Nous rappellerons rapidement le principe des méthodes simplifiées et ferons une remarque sur l'interprétation des taux d'actualisation associés.

1. La première méthode (taux d'actualisation adapté)

Elle est en général préconisée et utilisée lorsqu'un rationnement en capital s'impose à l'ensemble des projets d'une entreprise. Considérons donc une entreprise qui dispose d'un budget limité, et dont le taux d'actualisation initial est défini comme un coût (direct) du capital. Nous supposons que l'ensemble des projets rentables à ce taux représente un montant d'investissement supérieur au budget disponible.

La première méthode consiste à relever la valeur du taux d'actualisation de façon que l'ensemble des projets rentables à ce nouveau taux puisse être financé avec les ressources en capital disponibles. Ce taux correspond alors à un coût de rareté du capital.

2. La deuxième méthode

Elle est parfois appelée méthode de l'enrichissement en capital. Elle est le plus souvent utilisée lorsqu'une division de l'entreprise dispose d'un budget limité. Elle consiste à poser le problème en cherchant à maximiser le revenu actualisé de l'ensemble des projets de la division en respectant la contrainte de rationnement en capital.

$$\text{Max} \sum_{k=1}^{m} R_k \qquad \text{(I)}$$

avec $$\sum_{k=1}^{m} I_k \leq B$$

où :	R_k	est le revenu actualisé du kième projet (au taux d'actualisation initial de l'entreprise)
	I_k	le montant d'investissement de ce kième projet
	m	le nombre de projets disponibles.

Dans le cas particulier où les projets considérés sont tous indépendants les uns des autres et de taille fixée a priori, la méthode consiste à classer les projets par enrichissement relatif en capital décroissant (l'enrichissement relatif est égal au rapport du revenu actualisé au coût d'investissement). Les projets sont alors pris dans cet ordre les uns après les autres jusqu'à ce que la somme des coûts d'investissement correspondants atteigne le montant du capital disponible.

Dans le cas général, il s'agit de déterminer le coefficient de Lagrange λ permettant de ramener le problème posé, maximisation d'une somme de revenus actualisés sous contrainte, à un problème d'optimisation sans contrainte. Le critère qui se substitue au revenu actualisé s'écrit alors, pour un projet d'indice k :

$$L_k = R_k + I_k - (1 + \lambda)\, I_k$$

$R_k + I_k$ est la somme des flux de trésorerie postérieurs à l'année 0 actualisés. $1 + \lambda$ s'interprète comme un coût fictif (ou coût d'opportunité) des fonds investis.

De façon concrète, et en dehors de l'utilisation de modèles de programmation mathématique, un moyen de procéder est de définir par approximations successives le coût fictif $1 + \lambda$. Les calculs de rentabilité sont effectués en remplaçant chaque franc investi par ce coût d'opportunité, c'est-à-dire en affectant à toute dépense d'investissement un coefficient multiplicateur $(1 + \lambda)$ supérieur à 1. Donner une valeur plus élevée à ce coût fictif conduit à rejeter certains projets, à diminuer la taille d'autres, bref à retenir un budget d'investissement moins élevé. Il est donc possible de déterminer par itérations successives le coefficient $1 + \lambda$ tel que le montant total des investissements retenus soit compatible avec le budget initial B.

Dans la pratique, les itérations se font souvent au cours du temps : si, au cours d'une année donnée, les projets qui paraissaient rentables ont été trop nombreux, à situation semblable l'année suivante, on relève la valeur du coût fictif.

C'est d'ailleurs ainsi, schématiquement, qu'opère le Commissariat du Plan français pour définir le coût d'opportunité des fonds publics.

Remarquons que l'une et l'autre méthode consistent à affecter au capital un coût plus élevé que sont coût direct effectif, dans le premier cas en imposant une rémunération minimum plus élevée, dans le deuxième en majorant toute dépense d'investissement

3. Domaines de validité

Nous ne reviendrons pas sur la validité, non contestée, de la deuxième méthode de l'enrichissement relatif lorsqu'un budget limité est alloué à une division de l'entreprise. Considérons donc le cas d'un rationnement en capital affectant l'ensemble des investissements d'une entreprise. Une thèse classique conduit dans ce cas à considérer comme non justifiée l'utilisation de la deuxième méthode (enrichissement en capital). En effet, le taux d'actualisation utilisé (non modifié) n'a pas, en cas de rationnement, les "bonnes" propriétés qui permettent de dire que les coefficients d'actualisation sont des coefficients d'équivalence entre des sommes disponibles à des dates différentes. (Parmi ces "bonnes" propriétés figure la possibilité de mobiliser du capital supplémentaire, fut-ce de façon marginale, à un taux égal au taux d'actualisation). Le critère du revenu actualisé perd alors son assiette théorique.

Avec la première méthode, du taux d'actualisation modifié, ces propriétés sont vérifiées, au moins à la marge d'un programme d'investissement, le taux d'actualisation modifié assurant un équilibre entre les disponibilités en capital et les besoins nécessaires au financement des projets rentables à ce taux. A la marge, un franc de capital supplémentaire est valorisé à un taux égal à la rentabilité marginale des investissements, donc à un taux égal au taux d'actualisation. Ce raisonnement n'est cependant rigoureux que si l'on considère un modèle à deux périodes, ou si l'on peut supposer que l'évolution dans le temps des contraintes de rationnement en capital sera telle que le coût de rareté du capital sera stable sur la période d'étude, de façon à justifier l'utilisation d'un taux d'actualisation lui-même stable au cours des années à venir.

4. Interprétation de la deuxième méthode à l'aide d'un suite modifiée de taux d'actualisation

Lorsque l'on veut prendre en compte l'évolution prévisible des contraintes de budget dans le temps, il est nécessaire de recourir à des modèles de programmation mathématique. C'est ce que nous ferons au cours de la section suivante. Mais l'analyse des taux d'actualisation obtenus dans le cadre d'une modélisation nous a permis de donner un éclairage à la deuxième méthode simplifiée avec une interprétation très simple. Revenons donc à cette deuxième méthode.

Nous considérons le cas particulier où la dépense d'investissement I_k d'un projet k est effectuée au cours d'une seule année, l'année 0.

Notons $F_{n,k}$ le flux de trésorerie à l'année n d'un projet k, et N la dernière année de la période d'étude. Le revenu actualisé, calculé avec un coût d'opportunité appliqué aux dépenses d'investissement s'écrit :

$$L_k = \sum_{n=1}^{N} \frac{F_{n,k}}{(1+i)^n} - (1+\lambda)\, I_k$$

Il revient au même de chercher à maximiser $\sum_k L_k$ ou bien $\sum L_k / (1+\lambda)$.

$$\frac{L_k}{1+\lambda} = \sum_{n=1}^{N} \frac{F_{n,k}}{(1+\lambda)\,(1+\mathrm{i})^n} - I_k$$

Ce critère peut être interprété en utilisant une suite de taux d'actualisation $g_0^1, g_1^2, ..., g_{N-1}^N$, avec :

$$1 + g_0^1 = (1+\lambda)\,(1+i)$$

$$g_{n-1}^{n} = i \qquad \text{pour } n = 2, 3, ..., N$$

Il revient donc au même de rechercher la valeur de λ qui permet à l'ensemble des projets retenus de rentrer dans l'enveloppe budgétaire ou bien de rechercher la valeur du taux d'actualisation g_0^1 de l'année 1 par rapport à l'année 0. La valeur du taux d'actualisation inchangée pour les années ultérieures correspond à une hypothèse d'absence de rationnement du capital.

Les deux méthodes étudiées peuvent alors donner lieu à une interprétation semblable ; **il s'agit dans les deux cas d'utiliser une suite de taux d'actualisation telle que l'ensemble des projets dont le revenu actualisé est positif puisse être financé au moyen du budget disponible**. Avec la deuxième méthode (enrichissement relatif), seul le taux d'actualisation de l'année 1 par rapport à l'année 0 est modifié. Avec la première (taux d'actualisation adapté), tous les taux d'actualisation sont modifiés et égaux entre eux.

Cette interprétation, bien que très banale, permet de mieux appréhender les conditions de validité de la deuxième méthode.

D'un point de vue théorique, s'il existe une seule contrainte de budget à l'année 0, la méthode est parfaitement justifiée.

Dans la pratique, elle peut donc être préférée à la première lorsque l'on prévoit un rationnement en capital passager.

II. MAXIMISATION D'UNE VALEUR ACTUELLE PAR PROGRAMMATION MATHEMATIQUE

1. Formulation

De nombreuses recherches ont été menées, principalement à partir des années 1960, pour étudier les problèmes de choix d'investissement en présence de rationnement de capital à l'aide de modèles de programmation mathématique, de façon à prendre en compte des contraintes de budgets sur plusieurs périodes.

Un des premiers modèles de choix d'investissement en présence de rationnement de capital, et auquel il est souvent fait référence est celui de Lorie et Savage [14]. Il a été reformulé en utilisant une présentation sous forme de programme linéaire par Weingartner [3].

Une première variante est relative au cas où le budget disponible pour les investissements est limité, et ceci indépendamment des encaissements réalisés. Cette variante peut être adaptée pour prendre en compte l'hypothèse d'un rationnement imposé à une **division** de l'entreprise. Nous nous intéresserons ici seulement à une deuxième variante, en considérant un problème de rationnement qui se pose pour l'ensemble d'une entreprise. On suppose alors que le montant de capital disponible chaque année n pour les investissements est la somme d'une disponibilité préétablie B_n et du revenu des investissements réalisés au cours des années antérieures. Les disponibilités B_n correspondent aux différentes ressources qui peuvent être dégagées indépendamment des projets étudiés (autofinancement correspondant aux investissements antérieurs à la période d'étude et disponible après remboursement d'emprunts et versements de dividendes, emprunts, augmentations éventuelles de capital).

Le problème s'écrit :

$$\text{Max} \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=0}^{N} \frac{F_{n,k}}{(1+i)^n}$$

sous les contraintes : (II)

$$- \sum_{k=1}^{m} F_{n,k} \leq B_n$$

avec :

m : nombre de projets étudiés,
$F_{n,k}$: flux de trésorerie à l'année n d'un projet d'indice k,
$I_{n,k}$: montant d'investissement dépensé à l'année n pour réaliser un projet k..

Remarquons que, contrairement à ce qui a été fait en section précédente, nous ne distinguons pas les flux de trésorerie correspondant aux dépenses d'investissement et les flux de trésorerie des années d'exploitation. Ainsi, au cours d'une année d'investissement n précédant l'exploitation d'un projet k

$$F_{n,k} = - I_{n,k}$$

La formulation ainsi retenue permet de prendre en compte des dépenses d'investissements réparties sur plusieurs années.

Les premiers modèles étudiés étaient des modèles de programmation linéaire. Les projets étaient supposés indépendants et divisibles, les flux de trésorerie associés à un projet étant proportionnels à la fraction réalisée du projet.

Ces modèles ont été généralisés pour prendre en compte des non-linéarités, des choix binaires, des incompatibilités entre projets, des relations d'interdépendance... Ceci conduit à l'écriture d'un certain nombre de contraintes complémentaires qui ne seront pas explicitées ici. La formulation peut nécessiter l'introduction de variables entières (choix en tout ou rien). Un exemple est donné par le modèle CAPRI de la SEMA [6] qui est un modèle de programmation linéaire en variables mixtes.

Nous nous intéresserons ici seulement aux contraintes de budget. Les flux $F_{n,k}$ peuvent être fonctions non seulement de la taille du projet k réalisé mais également de la réalisation et de la taille des autres projets.

Le problème que pose cette formulation est celui de la pertinence d'un critère de valeur actualisée. Ainsi que nous l'avons indiqué au paragraphe I.3, le taux d'actualisation n'a pas en présence de rationnement de capital les "bonnes" propriétés qui justifient la technique de l'actualisation. L'objet de cette section est de montrer, sous certaines hypothèses, que la validité de cette formulation est cependant assurée.

2. Utilisation des variables duales et décentralisation des décisions

A. Multiplicateurs de Lagrange et coût d'opportunité du capital

Supposons le problème global résolu par une méthode de programmation mathématique, qu'il s'agisse de programmation linéaire, non linéaire, ou de théorie du contrôle. On dispose alors des variables duales λ_n associées à chacune des contraintes de budget. Il s'agit des valeurs des multiplicateurs de Lagrange qui permettent de remplacer le problème initial par un problème formulé sans contraintes de budget[1].

Le Lagrangien s'écrit :

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=0}^{N} \left[\frac{1}{(1+i)^n} + \lambda_n \right] F_{n,k}$$

Pour une décentralisation des décisions, le rationnement en capital peut être pris en compte par l'utilisation d'un coût d'opportunité égal à :

$$1 + \lambda_n (1+i)^n$$

Il s'agit d'un coefficient multiplicateur qui devra être appliqué à chaque flux de trésorerie (positif ou négatif) d'une année n.

B. Coût de rareté et taux d'actualisation endogènes

Une autre interprétation, équivalente, peut être utilisée. Elle consiste à définir une suite de coefficients ou de taux d'actualisation qui correspondent à des coûts de rareté prenant en

[1] En fait, il n'y a pas équivalence stricte entre le problème initial (avec contraintes) et le problème obtenu par relaxation et utilisation des coefficients de Lagrange lorsque ces problèmes sont formulés à l'aide de la programmation linéaire. Des réserves doivent également être faites lorsque l'on utilise les multiplicateurs de Lagrange généralisés et les théorèmes d'Everett [8], [11]. Lors de l'étude de problèmes réels, les contraintes sont rarement rigides et l'équivalence stricte n'est pas indispensable.

compte le rationnement en capital. Ces taux d'actualisation peuvent être qualifiés d'"endogènes".

Le coefficient d'actualisation (endogènes) d'une année p par rapport à une année n peut être défini comme égal au rapport de la valorisation marginale d'un capital disponible à l'année p à la valorisation marginale d'un capital disponible à l'année n . Or, les variables duales λ_n mesurent l'accroissement de la fonction économique que permettrait la disponibilité d'un franc supplémentaire à l'année n. La valorisation marginale d'un capital disponible à l'année n est donc :

$$z_n = \frac{1}{(1+i)^n} + \lambda_n$$

En notant c_p^n le coefficient d'actualisation endogène de l'année n par rapport à l'année p :

$$c_0^n = \frac{\frac{1}{(1+i)^n} + \lambda_n}{1+\lambda_0}$$

En notant g_n^{n+1} le taux d'actualisation endogène de l'année n+1 par rapport à l'année n il vient :

$$c_0^1 = \frac{1}{1+g_0^1} = \frac{\frac{1}{1+i} + \lambda_1}{1+\lambda_0}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$c_n^{n+1} = \frac{1}{1+g_n^{n+1}} = \frac{\frac{1}{(1+i)^{n+1}} + \lambda_{n+1}}{\frac{1}{(1+i)^n} + \lambda_n}$$

On vérifie immédiatement qu'il est bien équivalent de maximiser le Lagrangien Λ défini ci-dessus ou un revenu actualisé calculé avec la suite des taux d'actualisation g\s(1;0) , g_2^1 ..., g_{n-1}^n. Celle-ci permet de "lever" les contraintes de rationnement [2].

Remarquons au passage que lorsque deux contraintes de rationnement successives, relatives respectivement à une année n et une année $n+1$, ne sont pas saturées, le coefficient d'actualisation endogène est égal à :

$$c_n^{n+1} = \frac{1}{1+i}$$

Le taux d'actualisation endogène g_n^{n+1} est alors égal au taux d'actualisation initial.

Notons enfin que les taux d'actualisation endogènes ont bien les "bonnes" propriétés que l'on attend d'un taux d'actualisation.

En effet, un projet marginal (le dernier projet retenu) est un projet dont le Lagrangien L_k est nul :

$$L_k = \sum_{n=0}^{N}\left[\frac{1}{(1+i)^n} + \lambda_n\right] F_{n,k}$$

Un projet marginal, ou bien le dernier franc investi dans une gamme continue d'investissement, ont donc un revenu actualisé nul lorsque ce revenu est calculé avec les taux d'actualisation endogènes. Le transfert de sommes disponibles d'une année à une autre peut donc se faire en acceptant ou rejetant des projets marginaux. Tout se passe donc comme s'il était possible d'effectuer (pour le département technique) des placements ou des prêts à un taux égal au taux d'actualisation.

3. Invariance de la solution optimale par rapport au taux *i*. Théorème 1.

Considérons le cas où les contraintes de rationnement en capital sont toutes saturées, sauf celle de la dernière année N, au cours de laquelle on peut supposer qu'il n'y a pas d'investissement. **La solution optimale (le choix et la taille des projets) est alors**

---

[2] à la marge du programme optimal et sous les réserves de la note infra-paginale 1.

indépendante de la valeur du taux d'actualisation i choisie initialement. De plus, la suite des taux d'actualisation endogènes est indépendante de la valeur de i.

La justification de cette proposition est la suivante. Considérons le problème de rationnement en capital (II) :

$$\text{Max} \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=0}^{N} \frac{F_{n,k}}{(1+i)^n}$$

avec

$$-\sum_{k=1}^{m} F_{n,k} \leq B_n \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, ..., N\text{-}1$$

Considérons dans un premier temps seulement des projets qui constituent des gammes continues d'investissement indépendantes les unes des autres. Nous supposons que les flux de trésorerie $F_{n,k}$ sont des fonctions continues et dérivables $F_{n,k}(x_k)$ de la taille x_k des projets.

Remarque : Cette formulation recouvre celle faisant appel à la programmation linéaire utilisée pour le modèle de Lorie et Savage ; pour introduire une taille de projet bornée, il suffit en effet de définir des fonctions $F_{n,k}(x_k)$ telles que, au voisinage de la borne, le coût d'investissement croisse très rapidement, ou bien telles que les revenus chutent brutalement.

Remplaçons dans la fonction objectif le critère de revenu actualisé par un critère équivalent de revenu capitalisé à la dernière année N de la période d'étude. Nous supposons de plus les contraintes de budget des N -1 premières années saturées. Le problème s'écrit alors :

$$\text{Max} \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=0}^{N} (1+i)^{N-n} F_{n,k}(x_k)$$

avec :

$$-\sum_{k=1}^{m} F_{n,k}(x_k) = B_n \qquad n = 0, 1, 2, ..., N\text{-}1 \qquad (1)$$

Le Lagrangien s'écrit :

$$\Lambda = \sum_{n=0}^{N-1} \left[(1+i)^{N-n} + \lambda_n \right] \sum_{k=1}^{m} F_{n,k} + \sum_{k=1}^{m} F_{N,k} \tag{2}$$

En dérivant par rapport à la taille x_k du projet k, il vient :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left[(1+i)^{N-n} + \lambda_n \right] \frac{\mathrm{d}F_{n,k}}{\mathrm{d}x_k} + \frac{\mathrm{d}F_{N,k}}{\mathrm{d}x_k} = 0 \tag{3}$$

L'optimum est donné par le système (1) et (3) de $m + N$ équations à $m + N$ inconnues $x_1, x_2, \ldots x_m, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}$.

Posons $\pi_n = (1 + i)^{N-m} + \lambda_n$, et remplaçons dans (3) :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \pi_n \frac{\mathrm{d}F_{n,k}}{\mathrm{d}x_k} + \frac{\mathrm{d}F_{N,k}}{\mathrm{d}x_k} = 0 \tag{4}$$

Le système des équations (1) et (3) est équivalent au système des équations (1) et (4). Dans l'écriture de ce dernier, le taux i n'apparaît pas. La solution optimale $\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_m,$ $\overset{*}{\pi}_0, \overset{*}{\pi}_1, \ldots, \overset{*}{\pi}_{N-1}$ est donc indépendante de i. La taille des projets est indépendante de i.

Compte tenu de l'interprétation économique des multiplicateurs de Lagrange et de façon semblable à ce qui a été fait au paragraphe précédent, la valorisation marginale d'un franc disponible à l'année n, en valeur capitalisée à l'année N est égale à π_n. Par conséquent, π_n représente l'inverse du coefficient d'actualisation endogène c_n^N de l'année N par rapport à l'année n. La valeur à l'optimum des coefficients d'actualisation endogènes (et donc des taux d'actualisation) est indépendante de i :

$$c_n^{n+1} = \frac{\pi_{n+1}}{\pi_n}$$

Remarque 1 : L'interprétation des équations (3) est alors immédiate. Elles expriment le fait que le revenu actualisé (aux taux endogènes) du dernier franc investi dans un projet k est nul. Ceci correspond bien à l'optimum du dimensionnement d'un projet lorsqu'il n'y a pas de rationnement de capital. Ici il y a rationnement de capital, mais les taux d'actualisation (endogènes) sont définis de façon que les limitations initiales ne soient pas contraignantes.

Remarque 2 : Certains auteurs [19] ont proposé pour déterminer les taux d'actualisation endogènes une procédure itérative. Nous venons de voir qu'en fait ils découlent immédiatement de l'analyse des variables duales.

De façon plus générale, on peut avoir à considérer des projets discrets, des projets interdépendants, etc. Les hypothèses de continuité et dérivabilité peuvent ne pas être satisfaites. Il est alors possible d'utiliser des multiplicateurs de Lagrange généralisés d'Everett [16]. L'écriture du Lagrangien reste dans le cas général celle de l'équation (2). Il apparaît clairement que le taux d'actualisation n'intervient que dans des termes :

$$\pi_n = (1+i)^{N-n} + \lambda_n$$

La recherche des coefficients λ_n permettant de lever les contraintes[3] se ramène donc à la recherche des coefficients π_n, dont la valeur à l'optimum sera indépendante de i si les N-1 contraintes de budget sont saturées. La propriété reste donc vraie dans le cas général.

4. Discussion, validité de l'approche

Lorsqu'il y a rationnement en capital, les coefficients d'actualisation, calculés au coût -initial- du capital, ne constituent plus des coefficients d'équivalences entre sommes d'argent disponibles à des dates différentes. En effet cette équivalence repose sur la possibilité, pour le département technique, d'emprunter (au département financier) à un taux égal au coût du capital. Cette hypothèse n'est plus vérifiée, même marginalement, lorsque les budgets sont limités. Pour de nombreux auteurs dont [7], [3], ceci conduit à remettre en cause l'utilisation d'un critère de revenu actualisé lorsque le rationnement s'impose à l'ensemble des projets de l'entreprise.

[3] Toujours à la marge du programme optimal et sous les réserves de la note infra-paginale 1.

Remarque : Pour d'autres auteurs, le coût du capital, qui inclut le coût du capital propre, tient compte des préférences intertemporelles des actionnaires. Les possibilités d'allocation de leur consommation à différentes périodes sont données aux actionnaires par le marché des actions des entreprises de même classe de risque que l'entreprise considérée. Ils peuvent moduler leurs placements sur ce marché. Le seul taux d'actualisation valable est donc celui qui est calculé par référence au rendement du capital sur ce marché. Si les propriétaires de l'entreprise lui allouent des budgets limités (en dividendes) qui ne permettent pas de réaliser tous les projets rentables au coût du capital, cela ne doit pas remettre en cause la valeur du taux d'actualisation, mais doit conduire l'entreprise à rechercher un optimum sous contraintes.

En fait, la question de la pertinence du taux d'actualisation initial, défini comme un coût du capital, ne nous paraît pas constituer un problème réel. En effet, nous avons vu comment définir une suite de taux d'actualisation endogènes associés à un problème de maximisation de revenu actualisé sous contraintes. Les coefficients d'actualisation correspondants constituent bien, comme nous l'avons vu, des coefficients d'équivalence de sommes disponibles à des dates différentes, tout au moins lorsque l'on considère des variations marginales de disponibilités en capital. Et nous avons vu qu'il était équivalent de résoudre le problème initial, maximisation d'une valeur actuelle sous contrainte, ou bien d'effectuer les calculs sans contraintes avec les taux d'actualisation endogènes.

Les deux problèmes sont équivalents : si l'on admet la pertinence de l'un, la validité de l'autre en découle.

Remarque : Les taux d'actualisation endogènes permettent une décentralisation des décisions. Ils assurent une cohérence interne aux décisions d'investissement de l'entreprise. Mais si l'on fait référence aux choix intertemporels d'un entrepreneur, les taux d'actualisation endogènes ne sont pas nécessairement égaux aux taux que l'on obtiendrait à partir des taux d'actualisation psychologiques de l'entrepreneur. En effet, limiter le budget des investissements c'est fixer *a priori* des choix sur les sommes allouées à la consommation de l'entrepreneur aux différentes périodes.

Sur un modèle à deux périodes tels que ceux utilisés par Hirshleiffer [12], cela signifie que le taux d'actualisation psychologique est différent du taux de rentabilité marginale. Mais c'est ce dernier qui constitue le taux d'actualisation à retenir pour une décentralisation des décisions (cf. également [16] par exemple).

III. PROGRAMMES D'INVESTISSEMENT ET PLANS DE FINANCEMENT

Comme indiqué à la section précédente, la validité d'un critère de revenu actualisé calculé à un taux d'actualisation égal au coût du capital a été mise en cause par un certain nombre d'auteurs. Par ailleurs, une limitation de l'approche développée à la section précédente vient du fait que les budgets sont fixés *a priori*. La définition de ces budgets et le plan de financement peuvent ne pas être indépendants du choix des projets.

Différents auteurs ont alors proposé de construire des modèles permettant d'étudier simultanément les décisions d'investissement et les décisions de financement. Parmi ceux-ci figure le modèle CAPRI de la SEMA [6]. Nous reprendrons ici la formulation de Weingartner [3].

A. Le modèle de Weingartner. Présentation

Weingartner utilise des modèles de programmation linéaire, éventuellement en variables mixtes. Compte tenu des réserves émises sur la validité du taux d'actualisation défini comme un coût du capital, et puisque le financement constitue une inconnue, il préconise, comme les auteurs de CAPRI, d'utiliser comme critère la valeur de l'entreprise à l'année horizon (dernière année de la période d'étude). Différentes versions sont définies, en particulier suivant que l'on considère ou non plusieurs taux d'emprunt. Des taux croissants permettent en effet, selon l'auteur, de tenir compte d'un coût du risque qui s'accroît lorsque l'endettement s'accroît. Lorsqu'il y a ainsi plusieurs types d'emprunt et lorsque les projets sont indépendants et divisibles, le modèle s'écrit :

$$\text{Maximiser} \sum_{k=1}^{m} \overline{F_k}\, x_k + M_N - \sum_{h=1}^{q} E_{N,h}$$

avec :

$$-\sum_{k=1}^{m} F_{0,k}\, x_k + M_1 - \sum_{h=1}^{q} E_{0,h} \leq A_1$$

$$\sum_{k=1}^{m} F_{n,k} x_k - (1 + \nu)\, M_{n-1} + M_n + \sum_{h=1}^{q} (1 + e_h)\, E_{n-1,h} - \sum_{h=1}^{q} E_{n,h} \leq A_n$$

$(n = 1, 2, 3, \dots N\text{-}1)$

$E_{n,h} \leq L_{n,h}$ $\qquad$ $n = 0, 1, 2, \dots, N\text{-}1$

$h = 1, 2, \dots, q$

$0 \leq x_k \leq 1$ $\qquad$ $k = 1, 2, \dots, m$

Notations :

x_k	:	fraction de projet k réalisé ($k = 1, 2, \dots, m$) ;
$F_{n,k}$	:	flux de trésorerie à l'année n du projet k ;
$\overline{F}_k$	:	valeur actuelle à l'année N des flux de trésorerie du projet k postérieurs à l'année N (y compris année N) ;
A_n	:	autofinancement disponible à l'année n et résultant des activités de l'entreprise préexistantes et indépendantes de la réalisation des projets étudiés (constante) ;
M_n	:	liquidités disponibles à l'année n pour des placements financiers ;
ν	:	taux d'intérêt appliqué au placement des liquidités M_n ;
$E_{n,k}$	:	endettement à l'année n portant intérêt au taux e_h ;
e_h	:	taux d'intérêt de l'emprunt d'indice h ($h = 1, 2, \dots, q$) ;
$L_{n,k}$	:	limite imposée à l'année n à l'endettement d'indice h portant intérêt au taux e_h.

L'année horizon N est choisie de telle sorte que ce choix ait peu d'effets sur les décisions d'investissement à prendre au cours des années proches. L'utilisation dans la fonction économique de la valeur actualisée des flux postérieurs à l'année N peut être justifiée par le fait que le rationnement en capital devrait s'atténuer à long terme.

Un certain nombre de résultats théoriques ont été fournis par l'auteur. Nous en rappelerons deux.

Marché parfait du capital

Supposons que le taux d'intérêt soit unique et s'applique aussi bien aux placements qu'aux emprunts. Supposons de plus que l'accès à l'emprunt ne soit pas limité. Alors l'analyse du problème dual montre que les taux d'actualisation endogènes de chaque année sont égaux au taux de l'emprunt.

Cas général

Revenons au problème faisant intervenir plusieurs taux d'emprunt formulés ci-dessus. Supposons les emprunts classés par taux d'intérêt croissants. A l'optimum, le taux d'actualisation endogène d'une année est égal au taux d'intérêt du dernier emprunt utilisé lorsque le montant emprunté n'atteint pas la limite fixée pour l'année considérée.

B. Maximisation du revenu actualisé et maximisation de la valeur à l'horizon

En fait, un projet de financement peut faire l'objet de la même formulation qu'un projet d'investissement. Le problème de Weingartner formulé ci-dessus peut donc s'écrire :

$$\text{Maximiser} \sum_{k=1}^{m} \overline{F_k}\; x_k$$

avec :

$$- \sum_{k=1}^{m} F_{n,k}\, x_k \leq A_n$$

$$0 \leq x_k \leq 1$$

où $F_{n,k}$ représente maintenant le flux de trésorerie associé à un projet quelconque, qu'il s'agisse d'un projet d'investissement, d'un projet de financement (emprunt) ou de placement financier. Dans le cas d'un emprunt ou d'un placement financier, F_k correspond à une dette à rembourser ou à un solde à encaisser, produit d'un placement.

Lorsque le placement de la trésorerie à court terme est possible, il est clair que l'ensemble des contraintes sera saturé pour chacune des années 1 à N -1.

Supposons de même que les N -1 premières contraintes seront saturées si l'on cherche à maximiser le revenu actualisé (des fonds propres).

Théorème 2. Le problème de maximisation de la valeur à l'horizon est alors équivalent au problème de maximisation du revenu actualisé.

En effet, il est équivalent de maximiser la valeur à l'horizon ou bien, quel que soit le taux d'actualisation a des actionnaires :

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\overline{F_k}\, x_k}{(1+a)^N} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{A_n}{(1+a)^n}$$

puisque le deuxième terme de cette expression est une constante. Mais si toutes les contraintes sont saturées, ceci s'écrit encore :

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\overline{F_k}\; x_k}{(1+a)^N} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{F_{n,k}\, x_k}{(1+a)^n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{n,k}\, x_k}{(1+a)^n}$$

Nous retrouvons le résultat énoncé et démontré à la section précédente : la valeur à l'horizon étant indépendante des taux d'actualisation des années antérieures, la solution optimale est également indépendante de la valeur des taux d'actualisation des années 1 à N .

Comme à la section précédente, une fois résolu le problème global dans ses grandes lignes, une décentralisation des décisions peut être effectuée. Il suffit d'utiliser les taux d'actualisation endogènes calculés comme précédemment.

Ils permettent non seulement l'étude des décisions d'investissement mais également celles de financement.

Remarque : A l'optimum du problème de maximisation de la valeur à l'horizon, les N -1 contraintes sont saturées si l'on suppose qu'il y a la possibilité d'effectuer des placements d'une année sur l'autre. Ceci n'implique pas que les contraintes seront saturées à l'optimum du problème de maximisation du revenu actualisé. Les deux problèmes sont équivalents seulement si l'on peut supposer que les contraintes seront saturées à l'optimum pour chacun des problèmes pris séparément. En particulier, ils peuvent être équivalents pour certaines valeurs du taux d'actualisation (faibles valeurs) et non pour d'autres (valeurs élevées).

Conclusion

Les raisonnement précédents permettent de concilier certains points de vue qui avaient pu paraître divergents dans la littérature.

De nombreux modèles avaient été proposés avec pour objectif la maximisation de la valeur de l'entreprise à un horizon donné. Ils devaient en particulier pallier les inconvénients d'une première formulation correspondant à la maximisation d'une valeur actuelle sous contrainte et fournir à l'aide des variables duales la valeur des taux d'actualisation endogènes. Nous avons montré sous certaines hypothèses, d'une part que l'on peut déterminer des taux d'actualisation endogènes avec la première formulation, et d'autre part que les deux formulations sont équivalentes. Ceci permet de confirmer la validité des approches qui s'appuient sur la maximisation d'un revenu actualisé sous contraintes.

Cette analyse est essentiellement théorique puisque les applications des modèles de programmation mathématique sont assez limitées dans la pratique. Le plus souvent en effet, les entreprises utilisent les méthodes simplifiées rappelées en première section. Remarquons toutefois que, dans l'ordre chronologique, c'est l'étude théorique présentée en section II et III qui nous a conduit à énoncer l'interprétation de la deuxième méthode simplifiée (de l'enrichissement relatif en capital), interprétation très simple a posteriori, mais qui a permis de préciser son domaine de validité.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages :

[1] D. Babusiaux : "Décision d'investissement et calcul économique dans l'entreprise", Technip Editions, Economica, Paris, 1990.

[2] J.C. Holl, J.P. Plas, P. Riou : "Les choix d'investissement dans l'entreprise", PUF, 1973.

[3] H.M. Weingartner : "Mathematical programming and analysis of capital budgeting problems", Practice Hall, Englewood Cliffs, 1963 (réédité Markham, Chicago, 1967, Kershaw London, 1974).

Articles :

[4] M. Albouy : "Théorie financière de la firme. Séparation de l'activité financière et de l'activité technique. Incidence de la fiscalité. Stratégie financière", RAIRO vol. 10, n° 2, Février 1976.

[5] M. Albouy, A. Breton : "Taux d'actualisation et modèles de croissance", Revue d'Economie Politique, 1969.

[6] J.M. Audibert, J.C. Holl, J.P. Plas : "CAPRI, un modèle de calcul de programmes d'investissement", Gestion, Juin 1968.

[7] W.J. Baumol, R.E. Quandt : "Investment and discount rates under capital rationing, a programming approach", The Economic Journal, vol. 75, n° 298, June 1965.

[8] A. Charnes, W.W. Cooper : "A note on the "Fail-Safe" properties of the generalized Lagrange Multiplier Method", Operations Research, July-August 1965.

[9] A. Charnes, W.W. Cooper, M.H. Miller : "Application of linear programming to financial budgeting and the costing of funds", Journal of business, vol. 32, n° 1, January 1959.

[10] H. Everett : "Generalized Lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources", J.O.R.S.A., vol. 11, n° 3, 1963.

[11] H. Everett : "Comments on the preceeding note", Operations Research, July-August 1965.

[12] J. Hirshleiffer : "On the theory of optimal investment decision", Journal of Political Economy, vol. 66, n° 5, August 1958.

[13] J. Lebraty : "Programmation linéaire et choix du taux d'actualisaiton", in "Mélanges offerts à Henri Guitton", Dalloz-Sirey, 1976.

[14] J.H. Lorie, L.J. Savage : "Three problems in Capital Rationing", The Journal of Business, vol. 28, n° 4, October 1955.

[15] L.J. Merville, L.A. Tavis : "A generalized model for capital investment", Journal of Finance, vol. 28, n° 1, March 1973.

[16] J.C. Milleron : "Rôle des facteurs financiers dans la décision d'investissement. Un essai de formalisation", Annales de l'INSEE n° 5, 1970.

[17] E. Sautter : "Modèles équivalents et coûts marginaux", RIRO, n° 3, 1967.

[18] H.M. Weingartner : "Capital rationing : *n* authors in search of a plot", Journal of Finance, vol. 32, n° 5, December 1977.

[19] G.A. Whitmore, L.R. Amey : "Capital budgeting under rationing : comments on the LUSZTIG and SCHWAB procedure", Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 8, n° 1, January 1973.

Déjà parus

- CEG-1. D. PERRUCHET et J.-P. CUEILLE,
  Compagnies pétrolières internationales : intégration verticale et niveau de risque.
  Novembre 1990.
- CEG-2. C. BARRET et P. CHOLLET,
  Canadian gas exports : modeling a market in disequilibrium.
  Juin 1990.
- CEG-3. J.-P. FAVENNEC et V. PREVOT,
  Raffinage et environnement.
  Janvier 1991.

Le Centre Économie et Gestion (CEG), sous la direction de Denis BABUSIAUX, a pour objet d'assurer :

- La formation de jeunes diplômés à la maîtrise des techniques économiques et de gestion. Elle est basée sur trois programmes de formation distincts.
  - Le cycle **Économie et Gestion de l'Entreprise (EGE)**, accessible aux jeunes ingénieurs et aux diplômés scientifiques des universités, débouche, au terme d'une scolarité de 16 mois pour les ingénieurs et l'équivalent de deux années universitaires pour les autres étudiants, sur l'attribution du diplôme d'ingénieur ENSPM.
  - Le cycle **Energy Management and Policy (EMP)**, en collaboration avec l'université de Pennsylvanie à Philadelphie, se déroule en alternance à l'ENSPM et à l'université de Pennsylvanie sur 16 mois et conduit à deux diplômes : le Master of Science de l'université de Pennsylvanie et un diplôme de l'ENSPM (diplôme d'ingénieur ou Mastère Spécialisé).
  - Un **DEA en Économie de l'Énergie** dispensé en collaboration avec l'université de Bourgogne et l'université de Panthéon-Assas. Les candidats à l'admission en DEA doivent être détenteurs d'une maîtrise (sciences économiques, sciences de gestion, économétrie, etc.), d'un diplôme d'ingénieur ou d'une grande école de commerce ou équivalent.

  Un **Mastère** en **Politique et Gestion de l'Énergie** peut être délivré à l'issue d'un cursus s'appuyant sur des cours dispensés dans le cadre de l'un des programmes ci-dessus et un stage ou une micro-thèse de recherche de quatre à six mois.

- Une activité de recherche qui permet notamment à des étudiants de réaliser une thèse de doctorat dans les divers domaines de l'économie de l'énergie. Les doctorants français ou ressortissants de la CEE admis sur des postes de thèses peuvent recevoir une allocation de recherche de la part de l'ENSPM.

- La formation et le perfectionnement des personnels (dirigeants, ingénieurs et cadres, agents de maîtrise, techniciens et employés) des industries du pétrole et de la pétrochimie. Cette formation se déroule sous forme de stages inter ou intra-entreprise, mais peut également s'adapter à des besoins plus spécifiques sous forme de parcours de formation individualisés.